Základní vzorce pro primitivní funkce

FUNKCE	PRIMITIVNÍ FUNKCE	DEF. OBOR
$f(x) = 0 \, dx$	$F(x) = C$	R
$f(x) = 1 \, dx$	$F(x) = x + C$	R
$f(x) = x^n \, dx$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	R je-li $n \in Z^+$ R – {0} je-li $n \in Z-\{-1\}$ (0; ∞) je-li $n \in R$
$f(x) = \frac{1}{x} \, dx$	$F(x) = \mathrm{Ln}\lvert x \rvert + C$	(0; ∞)

FUNKCE	PRIMITIVNÍ FUNKCE	DEF. OBOR
$f(x) = \mathrm{Sin}[x]\,dx$	$F(x) = -\mathrm{Cos}[x] + C$	R
$f(x) = \mathrm{Cos}[x]\,dx$	$F(x) = \mathrm{Sin}[x] + C$	R
$f(x) = e^x\,dx$	$F(x) = e^x + C$	R
$f(x) = a^x\,dx$	$F(x) = \dfrac{a^x}{Ln[a]} + C$	R
$f(x) = \dfrac{1}{Cos^2[x]}\,dx$	$F(x) = \mathrm{Tan}[x] + C$	$R - \{(2k+1)\frac{\pi}{2}\}, k \in Z$
$f(x) = \dfrac{1}{Sin^2[x]}\,dx$	$F(x) = -\mathrm{Cot}[x] + C$	$R - \{k\pi\}, k \in Z$

Pravidla pro integraci:

$$\int c.f(x)\,dx = c \int f(x)\,dx$$

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$$

Integrační metody:

Metoda per partes

Mají-li funkce u, v v intervalu (a; b) spojité derivace, pak v (a; b)

platí $\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx$

Substituční metoda

$F(t)$ je primitivní funkce k funkci $f(t)$ v intervalu $(\alpha; \beta)$.

Funkce $t = g(x)$ má derivaci $g'(x)$ v intervalu $(a; b)$.

Pro každé $x \in (a; b)$ hodnota $g(x) \in (\alpha; \beta)$.

Pak v intervalu $(a; b)$ je funkce $F(g(x))$ primitivní funkcí

k funkci $f(g(x)).g'(x)$.

$$\int f(g(x)).g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

Výpočet určitého integrálu

Je-li *F* primitivní funkcí k funkci *f* v intervalu *I*.

Rozdíl *F(b)- F(a)* v libovolných bodech *a, b* tohoto intervalu se nazývá určitý integrál funkce *f* v mezích od *a* do *b*.

Značí se $\int_a^b f(x)dx.$

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

I. Primitivní funkce

1) Určete primitivní funkci k následujícín funkcím:

a) f_1: $y = 7x^6$

b) f_2: $y = \sqrt{x^3}$

c) f_3: $y = 2x^3\sqrt{x^5}$

d) f_4: $y = (-3 + 2x)^2$

e) f_5: $y = \frac{(4 - x^3)^2}{x^2}$

f) f_6: $y = 3 - x + 2\,\mathrm{Sin}[x]$

2) Určete primitivní funkci k následujícín funkcím:

a) f_1: $y = \frac{\mathrm{Cos}[2x]}{\mathrm{Sin}[x]^2}$

b) f_2: $y = \mathrm{Cot}[x]^2$

c) f_3: $y = 7e^x - \frac{5}{x}$

d) f_4: $y = \frac{\mathrm{Sin}[2x]}{\mathrm{Sin}[x]}$

3) Metodou per partes určete primitivní funkci k následujícín funkcím:

a) f_1: $y = x \operatorname{Cos}[x]$

b) f_2: $y = x^2 \operatorname{Sin}[x]$

c) f_3: $y = e^x x$

d) f_4: $y = \mathbf{x^2 \operatorname{ln}[x]}$

e) f_5: $y = \operatorname{Cos}[x]^2$

f) f_6: $y = e^x \operatorname{Sin}[x]$

4) Substituční metodou určete primitivní funkci k následujícín funkcím:

a) f_1: $y = (-3 + 2x)^5$

d) f_4: $y = \dfrac{1}{(-3 + x)^4}$

b) f_2: $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$

e) f_5: $y = (4 + 3x)^7$

c) f_3: $y = \mathrm{Tan}[x]$

f) f_6: $y = \mathrm{Sin}[3x]$

II. Určitý integrál

5) Vypočítejte určitý integrál z funkce, jsou-li dány meze a,b:

a) f_1: $y = 1 - x + x^2$

$a = 0;\ b = 1$

d) f_4: $y = \mathrm{Ln}[x]$

$a = 1;\ b = e$

b) f_2: $y = \mathrm{Sin}[x]$

$a = 0;\ b = \pi$

e) f_5: $y = \dfrac{\mathrm{Cos}[x]}{1 + \mathrm{Sin}[x]}$

$a = 0;\ b = \pi/2$

c) f_3: $y = 2 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{4}$

$a = -2;\ b = 4$

f) f_6: $y = \dfrac{x}{(1 + x^2)^2}$

$a = 0;\ b = 1$

III. Užití určitého integrálu

6) Vypočítejte obsah útvaru ohraničeného křivkami:

a) $y = \frac{x^2}{4}$

$y = 2 + \frac{x}{2}$

b) $y = 5x - x^2$

$y = 0$

c) $y = \mathrm{Sin}[x]$

$y = \mathrm{Sin}[x]^2$

$x = 0$

$x = \frac{pi}{2}$

7) Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací útvaru ohraničeného křivkami:

a) $y^2 + x - 4 = 0 \quad \wedge \quad x = 0$ kolem osy y

b) $y = 1 - x^2 \quad \wedge \quad y = x^2$ kolem osy x

Výsledky - integrace

1) a) $c + x^7$

b) $c + \frac{2x\sqrt{x^3}}{5}$

c) $c + \frac{4}{13} x^4 \sqrt{x^5}$

d) $c + \frac{1}{6}(-3 + 2x)^3$

e) $c - \frac{16}{x} - 4x^2 + \frac{x^5}{5}$

f) $c - \frac{1}{2}(-6 + x)\, x - 2\,\mathrm{Cos}[x]$

2) a) $c + 7 e^x - 5\,\mathrm{Ln}[x]$

b) $c + 2\,\mathrm{Sin}[x]$

c) $c - 2x - \mathrm{Cot}[x]$

d) $c - x - \mathrm{Cot}[x]$

3)

a) $c + \text{Cos}[x] + x\,\text{Sin}[x]$

b) $c - (-2 + x^2)\,\text{Cos}[x] + 2\,x\,\text{Sin}[x]$

c) $c + e^x\,(-1 + x)$

d) $c - \frac{x^3}{9} + \frac{1}{3}\,x^3\,\text{Ln}[x]$

e) $c + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\,\text{Sin}[2\,x]$

f) $c - \frac{1}{2}\,e^x\,\text{Cos}[x] + \frac{1}{2}\,e^x\,\text{Sin}[x]$

4)

a) $c + \frac{1}{12}\,(-3 + 2\,x)^6$

b) $c + \frac{1}{2}\,\text{Ln}[1 + x^2]$

c) $c - \text{Ln}[\text{Cos}[x]]$

d) $c - \frac{1}{3\,(-3 + x)^3}$

e) $c + \frac{1}{24}\,(4 + 3\,x)^8$

f) $c - \frac{1}{3}\,\text{Cos}[3\,x]$

5) a) $\frac{5}{6}$

b) 2

c) 9

d) 1

e) Ln[2]

f) $\frac{1}{4}$

6) a) 9

b) $\frac{125}{6}$

c) $1 - \frac{\text{pi}}{4}$

7) a) $\frac{512}{15}\pi$

b) $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$