Derivace elementárních funkcí

FUNKCE	DERIVACE	DEF. OBOR
$y = c$	$y' = 0$	R
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$	R je-li $n \in Z^+$ $R - \{0\}$ je-li $n \in Z$ $(0; \infty)$ je-li $n \in R$
$y = e^x$	$y' = e^x$	R
$y = Ln[x]$	$y' = \frac{1}{x}$	$(0; \infty)$
$y = Log_a[x]$	$y' = \frac{1}{x \cdot Ln[a]}$	R^+, $a \in R^+ - \{1\}$

FUNKCE	DERIVACE	DEF. OBOR
$y = \mathrm{Sin}[x]$	$y' = \mathrm{Cos}[x]$	R
$y = \mathrm{Cos}[x]$	$y' = \mathrm{Sin}[x]$	R
$y = \mathrm{Tan}[x]$	$y' = \frac{1}{Cos^2[x]}$	$R - \{(2k+1)\frac{\pi}{2}\}, k \in Z$
$y = \mathrm{Cot}[x]$	$y' = \frac{1}{Sin^2[x]}$	$R - \{k\pi\}, k \in Z$

Jestliže funkce *u, v* mají v bodě x_0 derivaci, pak platí:

derivace součtu funkcí *u, v*:

$$(u + v)'(x_0) = u'(x_0) + v'(x_0)$$

derivace rozdílu funkcí *u, v*:

$$(u - v)'(x_0) = u'(x_0) - v'(x_0)$$

derivace součinu funkcí *u, v*:

$$(uv)'(x_0) = u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0)$$

derivace podílu funkcí *u, v*:

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x_0) = \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}, \text{ pro } v(x_0) \neq 0$$

Derivace složené funkce

Jestliže funkce $z = g(x)$ má derivaci v bodě x_0 a jestliže funkce $y = f(z)$ má derivaci v bodě $z_0 = g(x_0)$, má složená funkce $y = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ derivaci v bodě x_0 a platí:

$$(f \circ g)(x) = f'(g(f(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

I. Derivace funkce v bodě

1) Na základě definice derivace vypočítejte derivaci funkce v bodě x_0:

a) f_1: $y = 5x+2$ b) f_2: $y = 3x^2-1$ c) f_3: $y = \frac{1}{x^2}$

2) Vypočítejte derivaci funkce v bodě x_0:

a) f_1: $y = x^2-x+1$ $x_0 = 2$

b) f_2: $y = x^3+x$ $x_0 = -1$

c) f_3: $y = \frac{1}{x}$ $x_0 = 1$

II. Derivace elementárních funkcí

1) Vypočítejte derivaci funkce v libovolném bodě jejího definičního oboru:

a) f_1: $y = 7 + x^2$

b) f_2: $y = 1 - x^2 + 5x^3$

c) f_3: $y = \frac{1}{x} + x$

d) f_4: $y = \frac{2}{x^7}$

e) f_5: $y = x\sqrt{x^3}$

f) f_6: $y = -4e^x$

g) f_7: $y = x^4 - \mathrm{Cos}[x] + \mathrm{Sin}[x]$

h) f_8: $y = $ **Log[x]**

2) Vypočítejte derivaci funkce v libovolném bodě jejího definičního oboru (derivace součinu, podílu, složené funkce):

a) f_1: $y = x \, \mathrm{Sin}[x]$

b) f_2: $y = \dfrac{\mathrm{Sin}[x]}{x}$

c) f_3: $y = 1 - e^{-x}$

d) f_4: $y = \dfrac{1 + \sqrt{x} + x}{\sqrt{x}}$

e) f_5: $y = e^{2x} + x$

f) f_6: $y = e^{1-2x+x^2}$

g) f_7: $y = \mathbf{Ln}[\mathbf{1} + \mathbf{x}]$

h) f_8: $y = \mathrm{Log}[1 + x]$

3) Vypočítejte derivaci funkce v libovolném bodě jejího definičního oboru (derivace součinu, podílu, složené funkce):

a) f_1: y = Sin[x^4]

b) f_2: y = Sin[x]^3

c) f_3: y = Ln[x^2]

d) f_4: y = $\dfrac{\sqrt{4x+x^2}}{-2+x^3}$

e) f_5: y = $2x\sqrt{1-x^2}$

f) f_6: y = x^3 Ln[x]

g) f_7: y = x^2 Cos[x^2]

h) f_8: y = Ln[$2x^3$] + Sin[$3x^2$]

III. Užití derivace

1) Napište rovnici tečny ke křivce v jejím bodě T[x_0]:

a) f_1: $y = \dfrac{-1+3x}{3+2x}$

$x_0=0$

b) f_2: $y = \dfrac{-1+2x^2}{1+x}$

$x_0=-1/2$

c) f_3: $y = (3-x)^{1/3}(1+x)$

$x_0=-1$

d) f_4: $y =$ **x Ln[x]**

$x_0=e$

e) f_5: $y =$ Sin[x]

$x_0=pi/3$

2) Napište rovnici tečny ke křivce, tečna je rovnoběžná s přímkou p:

a) f_1: $y = x^2$

p: y=4x-5

b) f_2: $y = \ln[x]$

p: y=x+2

c) f_3: $y = 2x + x^4$

p: y=2x-1

d) f_4: $y = x^3$

p: y=3x

e) f_5: $y = \mathrm{Tan}[x]$

p: y=2x-3

3) Určete intervaly monotónnosti a lokální extrémy funkcí:

a) f_1: $y = 3 + 2x - x^2$

c) f_3: $y = e^{-x} x$

b) f_2: $y = 3x^2 - 2x^3$

d) f_4: $y = \mathrm{Ln}^2[x]$

4) Na daném intervalu určete intervaly monotónnosti a lokální extrémy funkcí:

a) f_1: $y = \mathrm{Cos}[2x]$

$x \in (-\pi/2; \pi/2)$

b) f_2: $y = \mathrm{Sin}^3[x] + \mathrm{Cos}^3[x]$

$x \in (0; \pi)$

c) f_3: $y = 20 - 3x + x^3$

$x \in \langle -3; 3)$

5) Vyšetřete průběhy funkcí:

a) f_1: $y = 9x - 6x^2 + x^3$

b) f_2: $y = \dfrac{x^2}{-1 + x}$

c) f_3: $y = e^{-x} x^2$

d) f_4: $y = \ln[1 - x^2]$

e) f_5: $y = 2x^2 - \ln[x]$

6) V daných intervalech vyšetřete průběhy funkcí:

a) f_1: $y = \mathrm{Sin}^2[x]$

$x \in \langle -\pi; \pi \rangle$

b) f_2: $y = \dfrac{1}{\mathrm{Sin}[x]}$

$x \in \langle -\pi; \pi \rangle$

c) f_3: $y = \mathrm{Cos}[x] + \mathrm{Sin}[x]$

$x \in \langle 0; 2\pi \rangle$

Výsledky - derivace

I. Derivace funkce v bodě

1) a) 5

   b) $6x_0$

   c) $-2x_0^{-3}$

2) a) 3

   b) 4

   c) -1

II. Derivace elementárních funkcí

1) a) $2x$

   b) $-2x + 15x^2$

   c) $1 - \frac{1}{x^2}$

   d) $-\frac{14}{x^8}$

   e) $\frac{5\sqrt{x^3}}{2}$

   f) $-4e^x$

   g) $4x^3 + \mathrm{Cos}[x] + \mathrm{Sin}[x]$

   h) Ln[x]/Ln[10]

2)

a) $x\,\mathrm{Cos}[x] + \mathrm{Sin}[x]$

b) $\frac{\mathrm{Cos}[x]}{x} - \frac{\mathrm{Sin}[x]}{x^2}$

c) e^{-x}

d) $\frac{1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} - \frac{1 + \sqrt{x} + x}{2\,x^{3/2}}$

e) $1 + 2\,e^{2\,x}$

f) $e^{1-2\,x+x^2}\,(-2 + 2\,x)$

g) $\frac{1}{1 + x}$

h) 1/((1+x) Ln[10])

3)

a) $4\,x^3\,\mathrm{Cos}[x^4]$

b) $3\,\mathrm{Cos}[x]\,\mathrm{Sin}[x]^2$

c) $\frac{2}{x}$

d) $-\frac{3\,x^2\,\sqrt{4\,x + x^2}}{(-2 + x^3)^2} + \frac{4 + 2\,x}{2\,\sqrt{4\,x + x^2}\,(-2 + x^3)}$

e) $-\frac{2\,x^2}{\sqrt{1 - x^2}} + 2\,\sqrt{1 - x^2}$

f) $\mathbf{x^2 + 3\,x^2\,Ln[x]}$

g) $2\,x\,\mathrm{Cos}[x^2] - 2\,x^3\,\mathrm{Sin}[x^2]$

h) $\frac{3}{x} + 6\,x\,\mathrm{Cos}[3\,x^2]$

III. Užití derivace

1)

a) $\left\{y \to \frac{1}{9}(-3 + 11x)\right\}$

b) $\{y \to -2(1 + x)\}$

c) $\{y \to 2^{2/3}(1 + x)\}$

d) $\{y \to -e + 2x\}$

e) $\left\{y \to \frac{1}{6}\left(-\pi + 3\left(\sqrt{3} + x\right)\right)\right\}$

2)

a) $\{y \to 4(-1 + x)\}$

b) $\{y \to -1 + x\}$

c) $\{y \to 2x\}$

d) $\{y \to 2 + 3x\}$

$\{y \to -2 + 3x\}$

e) $\left\{y \to 1 - \frac{\pi}{2} + 2x\right\}$

v intervalu <0,pi>

3)

a)
v $(-\infty; 1>$ rostoucí
v $<1; \infty)$ klesající
v bodě 1 lokální max

c)
v $(-\infty; 1>$ rostoucí
v $<1; \infty)$ klesající
v bodě 1 lokální max

b)
v $(0; 1>$ rostoucí
v $(-\infty; 0>$, $<1; \infty)$ klesající
v bodě 1 lokální max
v bodě 0 lokální min

d)
v $(0; 1>$ klesající
v $<1; \infty)$ rostoucí
v bodě 1 lokální min

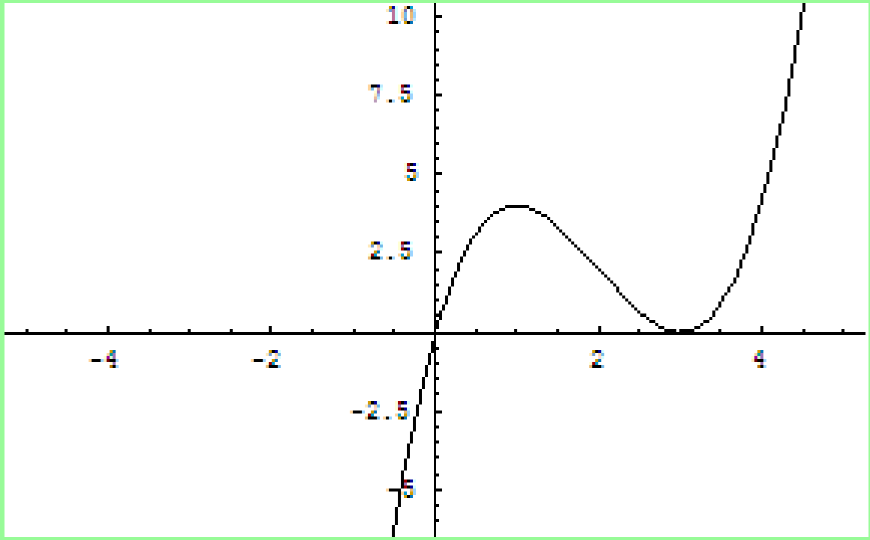
4)

a)
v $(-\pi/2; 0>$ rostoucí
v $<0; \pi/2)$ klesající
v bodě 1 lokální max

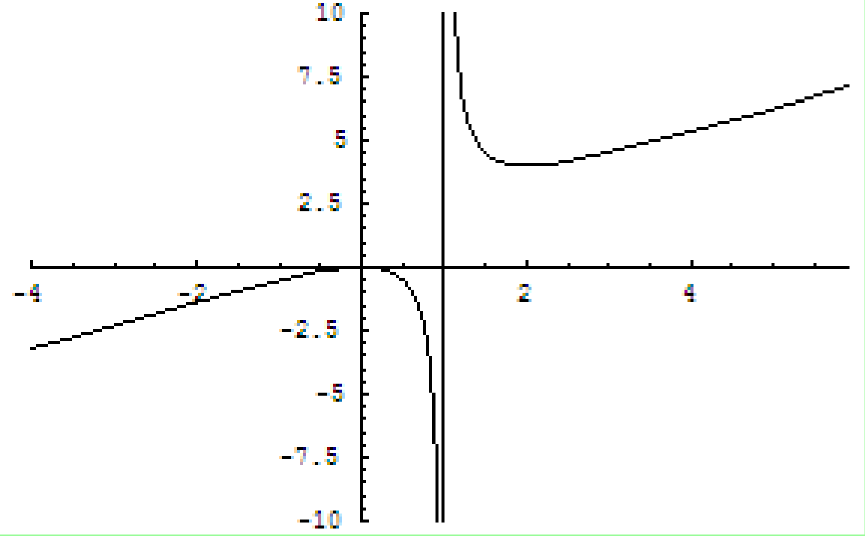
b)
v $(0; \pi/4>$, $<\pi/2; \pi)$ klesající
v $<\pi/4; \pi/2>$ rostoucí
v bodě $\pi/2$ lokální max
v bodě $\pi/4$ lokální min

c)
v $< -3; 1>$ klesající
v $<1; 3)$ rostoucí
v bodě 1 lokální min

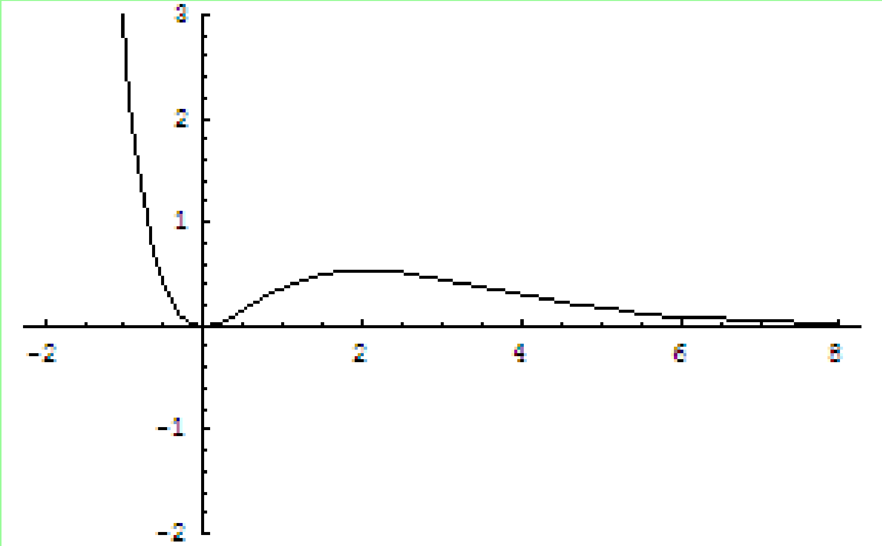
5) a)



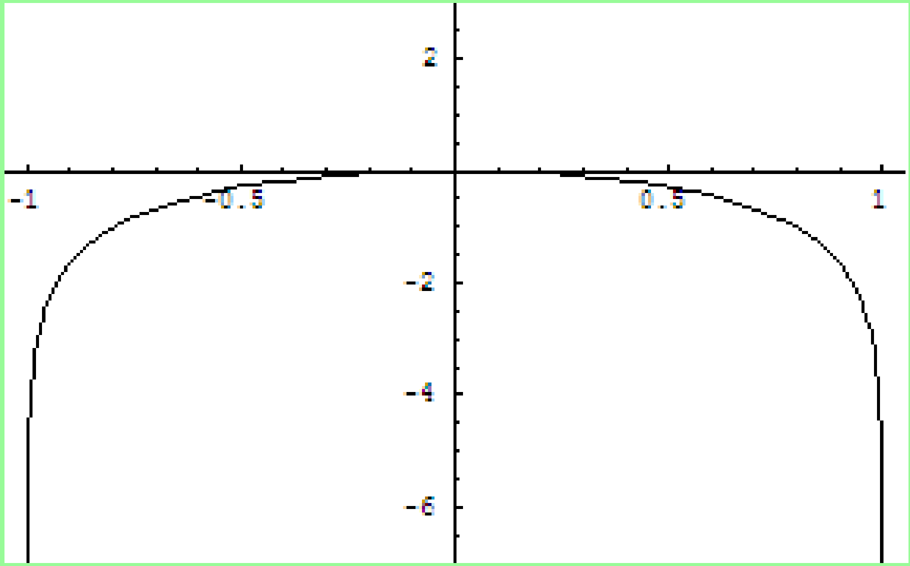
b)



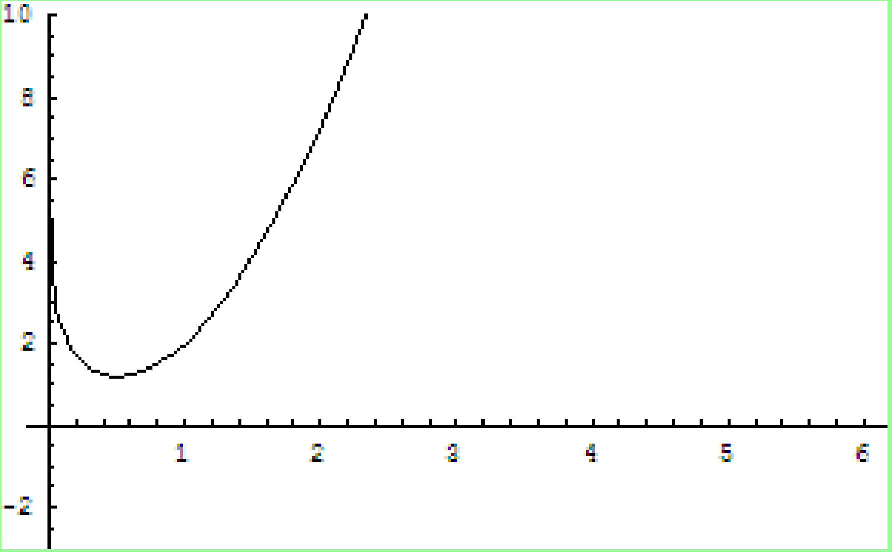
c)



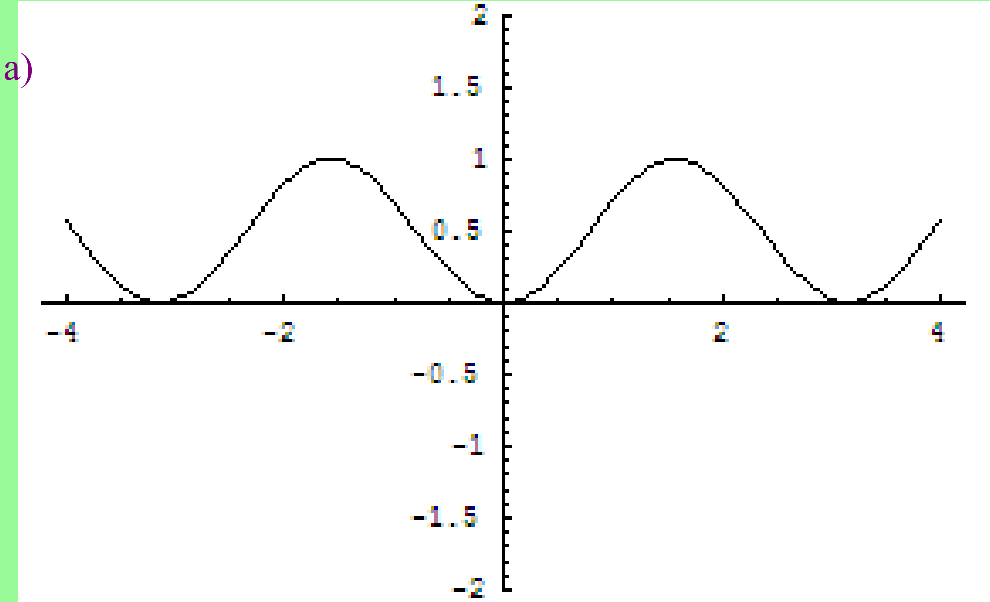
d)



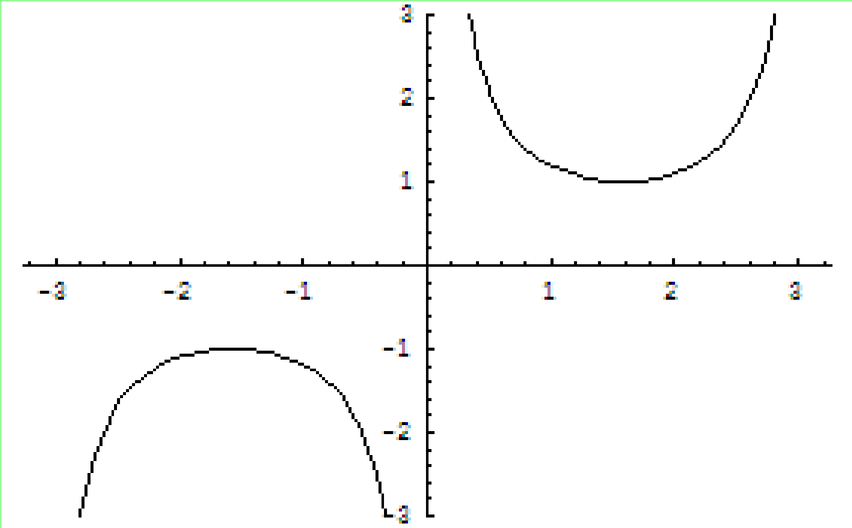
e)



6) a)



b)



c)