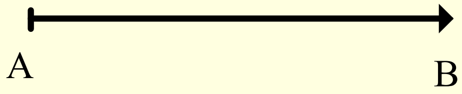
Analytická geometrie

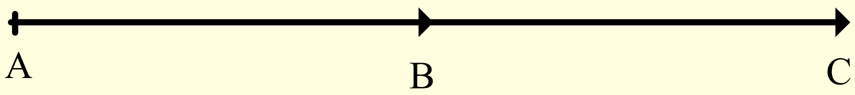
- přímka
- vzájemná poloha přímek
- rovina
- vzájemná poloha rovin

Rovnice přímky

a) parametrická

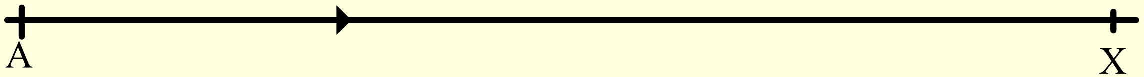


$$\boxed{\vec{u} = AB = B - A}$$



$$\boxed{B = A + \vec{u}}$$

$$\boxed{C = A + 2\vec{u}}$$



$$\boxed{X = A + t\vec{u}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{aligned} x &= a_1 + tu_1 \\ y &= a_2 + tu_2 \end{aligned}}$$

1) Napište parametrickou rovnici přímky, která prochází bodem $A = [-7; 1]$ a jejíž směrový vector je $u = (3; -4)$

2) Zjistěte, zda body $A = [9; -3; 7]$, $B = [3; 0; 3]$ leží na přímce $x = 1 + 2t$, $y = 1 - t$, $z = 3t$

ad 1) $x = -7 + 3t$
$y = 1 - 4t$

ad 2) A neleží
B leží

b) obecný tvar

Vyjádřením parametru z jedné rovnice a dosazení do druhé rovnice eliminujene parametr.

$$ax + by + c = 0$$

1) Dané parametrické rovnice převeďte na obecný tvar.
$x = t;\ y = 4 - 3t$

ad 1) $3x + y - 4$

a) směrnicový tvar

$$y = ax + b$$

$$a = \operatorname{tg} \varphi$$

φ směrový úhel přímky

$$a = \frac{u_2}{u_1}$$

$$\vec{u} = (u_1, u_2)$$

směrový vektor přímky

Obecnou rovnici převedeme na směrnicový tvar tak, že vyjádříme z obecné rovnice y.

1) Napište směrnici přímky určené body A = [-3; -7], B = [2; -3]

řešení: a = 0,8

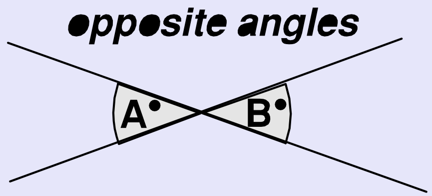
2) Dokažte, že body R = [3; 4], S = [-1; 2], T = [1; 3], U = [-5; 0] leží v jedné přímce. Napište její rovnici

řešení x - 2y + 5 = 0

Vzájemná poloha dvou přímek

Polohy přímek:

- rovnoběžné (různé, totožné)
- různoběžné
- mimoběžné

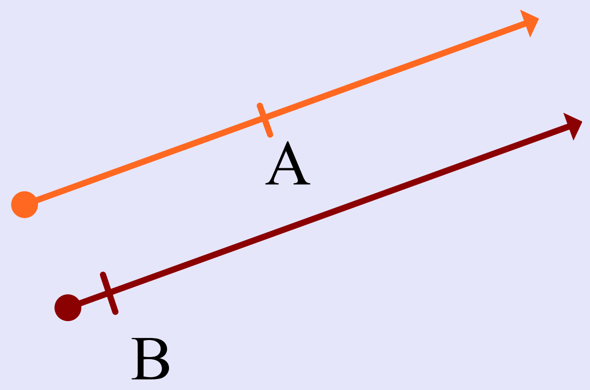


Rovnoběžnost přímek

podmínka: směrové vektory obou přímek - u,v jsou kolineární
(závislé, tj. jeden lze napsat jako násobek druhého)

- totožné: vektor B - A je k násobkem vektoru u a v
- různé: vektor B - A není k násobkem vektoru u a v

Pokud máme přímky v obecných rovnicích, stačí vyřešit soustavu rovnic:
a) nekonečně řešení - totožné přímky
b) žádné řešení - různé rovnoběžky

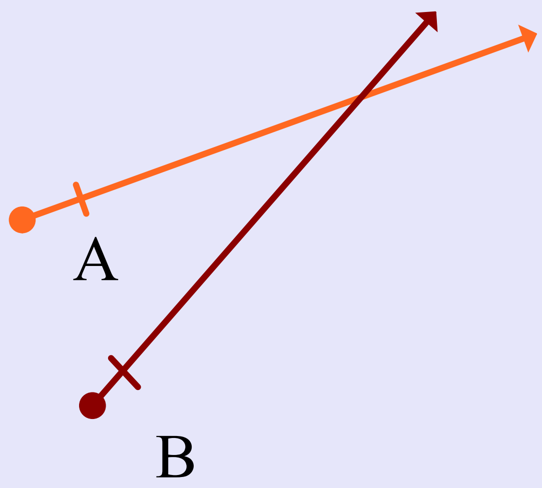


Různoběžnost přímek

podmínka: směrové vektory obou přímek - u,v jsou nekolineární (nezávislé, tj. jeden nejde napsat jako násobek druhého)

- vektor B - A je lineární kombinací vektorů u a v

Pokud máme přímky v obecných rovnicích, stačí vyřešit soustavu rovnic a vypočítat průsečík.

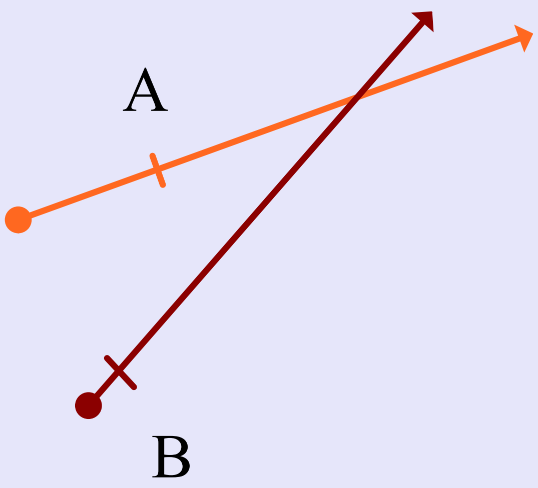


Mimoběžnost přímek (pouze v prostoru)

podmínka: směrové vektory obou přímek - u,v jsou nekolineární (nezávislé, tj. jeden nejde napsat jako násobek druhého)

- vektor B - A není lineární kombinací vektorů <u>u</u> a <u>v</u>

Rovnice přímek nemohou existovat v obecné podobě, pouze jako parametrické.



Určete vzájemnou polohu přímek:

$$p: 6x - 5y + 25 = 0$$

$$q: \begin{array}{l} x = -5 + 5t \\ y = -1 + 6t \end{array}$$

Přímku q převedeme na obecnou rovnici (parametr dosadíme z jedné rovnice do druhé).
Dále řešíme jako soustavu 2 rovnic o dvou neznámých

Řešení: nekonečně mnoho společných bodů - totožné přímky

Určete vzájemnou polohu přímek:

$$p: 2x - 5y + 6 = 0$$
$$q: 8x + 15y + 10 = 0$$

Řešení: různoběžné přímky, společný bod P = [-2; 2/5]

Určete vzájemnou polohu přímek:

$$p: 3x - 7y + 29 = 0$$

$$q: \begin{array}{l} x = 15 + 14t \\ y = 23 + 6t \end{array}$$

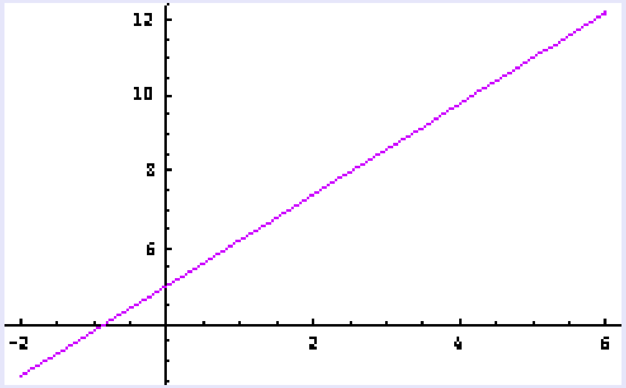
Řešení: rovnoběžné různé přímky, soustava nemá řešení

Řešní vzájemné polohy přímek pomocí matematického programu:

$$p: 6x - 5y + 25 = 0 \Rightarrow y = 6/5x + 5$$

$$q: \begin{aligned} x &= -5 + 5t \\ y &= -1 + 6t \end{aligned} \Rightarrow 6x-5y+25=0 \Rightarrow y = 6/5x + 5$$

```
t=6/5*x+5
v=6/5*x+5
Plot[{t,v},{x,-2,6},PlotStyle → {Hue[0.45],Hue[0.8]}];
```



řešením jsou totožné rovnoběžky

nekonečně mnoho společných bodů

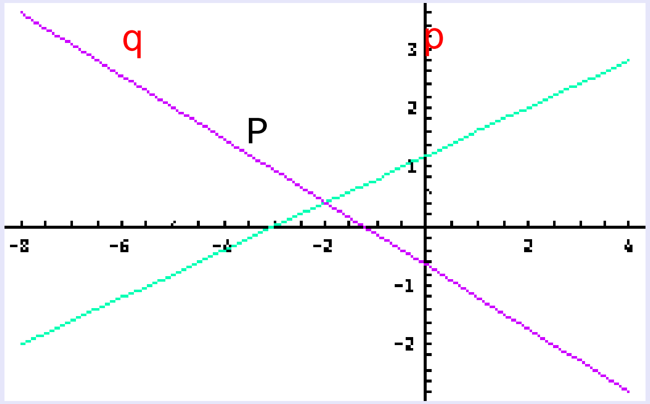
Řešní vzájemné polohy přímek pomocí matematického programu:

$$\boxed{\begin{array}{l} p: 2x - 5y + 6 = 0 \\ q: 8x + 15y + 10 = 0 \end{array}}$$

$\Rightarrow$ y = 2/5x + 6/5

$\Rightarrow$ y = -8/15x - 2/3

```
t=2/5*x+6/5
v=-8/15x-2/3
Plot[{t,v},{x,-8,4},PlotStyle →{Hue[0.45],Hue[0.8]}];
```



řešením jsou různoběžné přímky

společný bod:

```
Solve[{2x-5y+6=0,8x+15y+10=0},{x,y}]
```

P=[-2; 2/5]

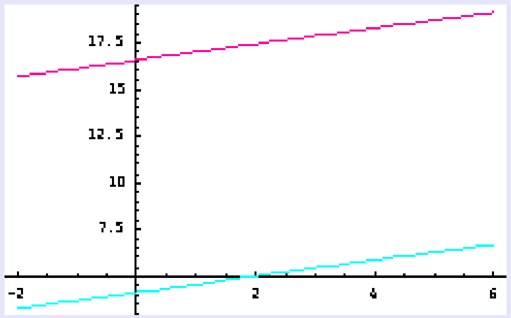
Řešní vzájemné polohy přímek pomocí matematického programu:

$$\boxed{\begin{aligned} p &: 3x - 7y + 29 = 0 \\ q &: \begin{aligned} x &= 15 + 14t \\ y &= 23 + 6t \end{aligned} \end{aligned}}$$

$\Longrightarrow$ y = 3/7x + 29/7

$\Longrightarrow$ 3x-7y+116=0 $\Longrightarrow$ y = 3/7x + 116/7

```
t=3/7*x+29/7
v=3/7*x+116/7
Plot[{t,v},{x,-2,6},PlotStyle →{Hue[0.5],Hue[0.9]}];
```



q

p

řešením jsou různé rovnob ěžné přímky

žádný společný bod : P = { }

```
Solve[{3x-7y+116 =0,3x-7y+29 =0},{x,y}]
```

Určete vzájemnou polohu přímek:

1.

$p:$ $2x - 4y + 9 = 0$

$q:$ $x - 2y + 9 = 0$

Výsledek příkladu 1

$\vec{n}_1 = (2;-4)$

$\vec{n}_2 = (1;-2)$

$\vec{u} = (4;2)$

$\vec{v} = (2;1)$

u a v jsou závislé - rovnoběžky

$2x - 4y + 9 = 0$

$x - 2y + 9 = 0$

různé rovnoběžky P ={ }

2.

$p: \; 3x - 2y - 5 = 0$

$q: \; y = -\frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$

Výsledek příkladu 2

$$3x - 2y - 5 = 0 \qquad \vec{n}_1 = (3;-2)$$

$$2x + 3y + 7 = 0 \qquad \vec{n}_2 = (2;3)$$

Vektory jsou na sebe kolmé

jsou na sebe kolmé i přímky

u a v jsou nezávislé - různoběžky

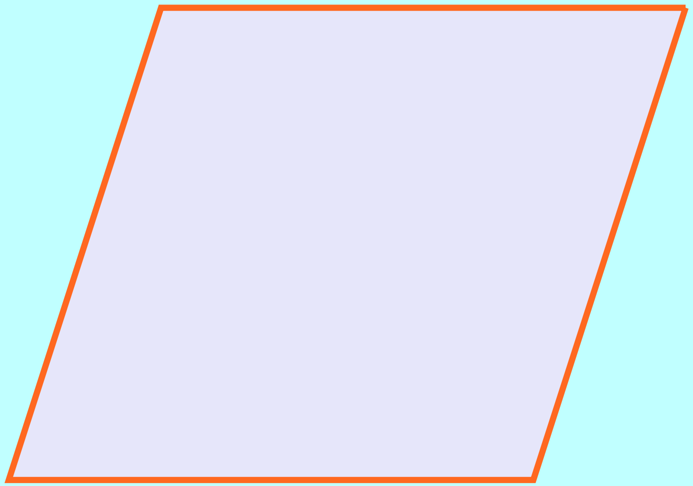
Určete vzájemnou polohu přímek:

p: $x = t$	$y = -4t$	$z = -3t$		rovnoběžné
q: $x = t$	$y = -8 - 4t$	$z = -3 - 3t$		
m:	$x = -3 + 2t$	$y = -1 + 2t$	$z = 4t$	mimoběžné
n:	$x = 3 + t$	$y = -1 + 2t$	$z = 4$	
a:	$2x + 2y - 7 = 0$			různoběžné
b:	$9x + 6y - 14 = 0$			

Rovnice roviny

1. parametrická $X = A + tu + sv$

2. obecná $ax + by + cz + d = 0$



u, v - nekolineární vektory

t, s - parametry

n = (a; b; c) - norm. vektor roviny

Příklad 1

Rovina je určena body A = [1; 2; -5], B = [0; 1; 5], C = [2; 1; 3]. Napište její parametrické rovnice a obecnou rovnici.

$\vec{u} = B - A = u = (-1; -1; 10)$
$\vec{v} = C - A = v = (1; -1; 8)$

vektory u a v jsou nekolineární

par. rovnice:

$x = 1 - t + s$
$y = 2 - t - s$
$z = -5 + 10t + 8s$

z první rovnice vyjádříme <u>t</u>, z druhé rovnice <u>s</u> a eliminací parametrů (dosadíme do třetí rovnice) dostáváme obecnou rovnici.
$x + 9y + z - 14 = 0$

Příklad 2

Napište parametrické rovnice roviny, která je určena body:
A = [1; 0; 2], B = [2; 1; 3], C = [0; 0;1]

Rešení př. 2

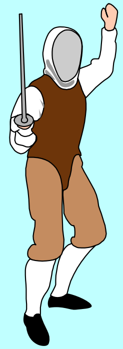
$$
\begin{aligned}
x &= 1 + t - s \\
y &= t \\
z &= 2 + t - s
\end{aligned}
$$

Příklad 3

Napište neparametrickou rovnici roviny, která je určena body:

a/ $A = [1; 0; 3]$, $B = [-2; 3; 0]$, $C = [-3; -2; 4]$

b/ $A = [0; 0; 0]$, $B = [1; 0; -3]$, $C = [2; -1; -2]$



Řešení př. 3

a/ $x - 5y - 6z + 17 = 0$

b/ $3x + 4y + z = 0$

Příklad 4

Rozhodněte, který z bodů A = [1; 1; 1], B = [-5; -3; -2], C = [0; -3; 0] leží
v rovině určené rovnicí $2x + y - 3z + 3 = 0$.

Řešení př. 4

A, B neleží, C leží

Příklad 5

Převeďte dané parametrické rovnice na obecný tvar:

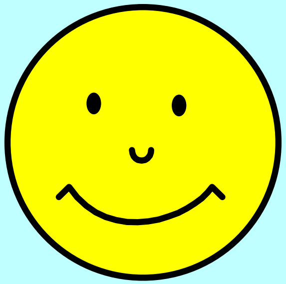
$x = 4 + t - 2s$

$y = 7 + t + 4s$

$z = 3 + 2t + 3s$

Řešení př. 5

$5x + 7y - 6z - 51 = 0$



Vzájemná poloha rovin

1. rovnoběžné

a) rovnoběžné různé

$$\boxed{\vec{n}_2 = k \cdot \vec{n}_1}$$

b) rovnoběžné totožné (s[…]

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{n}_2 = k \cdot \vec{n}_1 \\ d_2 = k \cdot d_1 \end{array}}$$

2. různoběžné

n_1, n_2

nekolineární (nezávislé)

Příklad 1

Určete vzájemnou polohu 2 rovin:

$$6x - 7y + z - 2 = 0$$

$$2x - 7y + 4z + 4 = 0$$

Výsledek př. 1

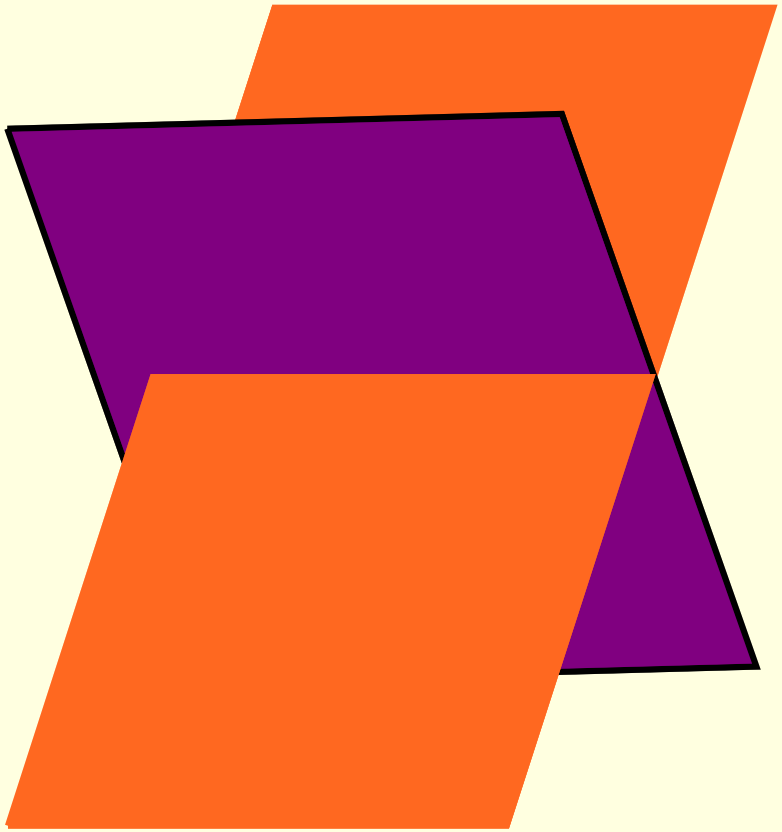
průsečnice rovin

např.

$x = 3/2 + 3/2t$

$y = 1 + 11/7t$

$z = 0 + 2t$



Příklad 2

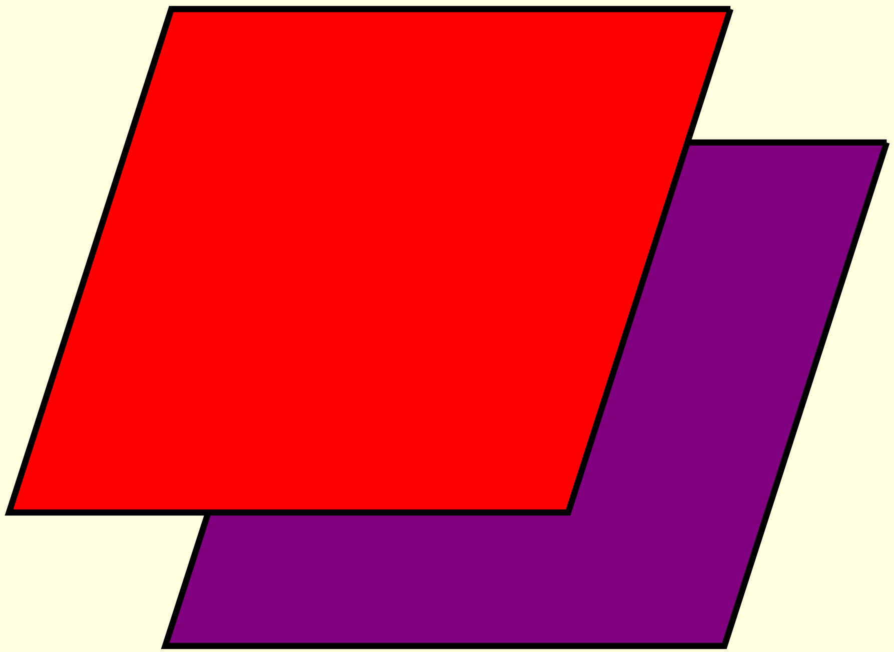
Určete vzájemnou polohu 2 rovin:

$x - y + 2z - 1 = 0$

$2x - 2y + 4z + 4 = 0$

Výsledek př. 2

rovnoběžné, různé roviny



Příklad 3

Určete vzájemnou polohu 2 rovin:

$x + y + z - 6 = 0$

$2x + 2y + 2z - 12 = 0$

Výsledek př. 3

rovnoběžné, splývající roviny